第6講　数列

1　[1]　数列 $\{a_n\}$ を初項1，公比 r の等比数列とし，数列 $\{b_n\}$ を初項1，公比 s の等比数列とする．第 n 項が $x_n=a_n+b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で与えられる数列 $\{x_n\}$ を考える．

$x_2=2$，$x_4=14$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　r，s を求めよ．ただし $r>s$ とする．

(2)　すべての自然数 n について $x_{n+2}=2x_{n+1}+x_n$ が成り立つことを示せ．

[2]　正の整数 a_1，a_2，a_3，a_4 がこの順に等比数列をなし，公比 r が整数でなく，かつ $r>1$ である．このとき，a_4 のとりうる値の最小値とそのときの a_1 を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定め，数列 $\{b_n\}$ を

$b_1=a_1a_2$，$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定める．

(1)　一般項 a_n を n を用いて表せ．

(2)　一般項 b_n を n を用いて表せ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3　p，q は正の整数とし，2 次方程式 $x^2-px-q=0$ の 2 つの実数解を α，β とする．$A_n=\alpha^n+\beta^n$ とおくとき，すべての正の整数 n について次のことが成り立つことを示せ．

（1）A_n は整数である．

（2）$A_{3n}-A_n{}^3$ は 3 で割り切れる．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第６講　数列

1　［1］　数列 $\{a_n\}$ を初項 1，公比 r の等比数列とし，数列 $\{b_n\}$ を初項 1，公比 s の等比数列とする．第 n 項が $x_n=a_n+b_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で与えられる数列 $\{x_n\}$ を考える．

$x_2=2$，$x_4=14$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　r，s を求めよ．ただし $r>s$ とする．

(2)　すべての自然数 n について $x_{n+2}=2x_{n+1}+x_n$ が成り立つことを示せ．

(1)　$a_n=1\cdot r^{n-1}$　$b_n=1\cdot s^{n-1}$　より　$x_n=r^{n-1}+s^{n-1}$

$x_2=2$ より　$r+s=2$　……①

$x_4=14$ より　$r^3+s^3=14$　　よって　$(r+s)^3-3rs(r+s)=14$　　$rs=-1$　……②

①，②より r，s は 2 次方程式　$t^2-2t-1=0$ の 2 解 $(r>s)$ である．

ゆえに　$\boldsymbol{r=1+\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{s=1-\sqrt{2}}$

(2)　(1)より $r^2-2r-1=0$　よって　$r^{n+1}=2r^n+r^{n-1}$　同様に　$s^{n+1}=2s^n+s^{n-1}$

したがって　$x_{n+2}=r^{n+1}+s^{n+1}=2(r^n+s^n)+(r^{n-1}+s^{n-1})=2x_{n+1}+x_n$　よって示された．

1　［2］　正の整数 a_1，a_2，a_3，a_4 がこの順に等比数列をなし，公比 r が整数でなく，かつ $r>1$ である．このとき，a_4 のとりうる値の最小値とそのときの a_1 を求めよ．

r は正の有理数であることより　$r=\dfrac{q}{p}$　（p，q は互いに素の正の整数）とおける．

$r>1$より　$q>p>0$　　また，r は整数ではないので　$p\geqq 2$　　ゆえに　$q\geqq 3$

このとき　$a_4=a_1\times r^3=a_1\times\dfrac{q^3}{p^3}$　これが整数であることよりa_1はp^3の倍数である．

よって，$a_1=kp^3$（k は正の整数）とおくと

$a_4=kq^3$　これが最小となるのは $k=1$　かつ　$q=3$のときであり，このとき　$p=2$

以上より　a_4の最小値は　**27**　であり，そのときの a_1 は　$\boldsymbol{a_1=8}$

2　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定め，数列 $\{b_n\}$ を $b_1=a_1a_2$，$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定める．

(1)　一般項 a_n を n を用いて表せ．

(2)　一般項 b_n を n を用いて表せ．

(1)　数列 $\left\{\dfrac{1}{a_1}\right\}$ は初項 3，公差 1 の等差数列である．

よって　$\dfrac{1}{a_n}=3+(n-1)\cdot 1=n+2$　　ゆえに　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{n+2}}$

(2)　$b_1=a_1\cdot a_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$　　$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}=\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}=\dfrac{1}{n+3}-\dfrac{1}{n+4}$

$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)=\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}=\frac{n}{3(n+3)}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ.　　ゆえに　$\boldsymbol{b_n=\dfrac{n}{3(n+3)}}$

3　p, q は正の整数とし，2 次方程式 $x^2-px-q=0$ の 2 つの実数解を α, β とする. $A_n=\alpha^n+\beta^n$ とおくとき，すべての正の整数 n について次のことが成り立つことを示せ.

(1)　A_n は整数である.

(2)　$A_{3n}-{A_n}^3$ は 3 で割り切れる.

---

(1)　$x^2-px-q=0$ の 2 実数解が α, β より，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=-q$

このとき「$A_n=\alpha^n+\beta^n$が整数」 ……(∗)　がすべての自然数 n で成り立つことを示す.

[1]　$n=1$ のとき　$A_1=\alpha+\beta=p$

$n=2$ のとき　$A_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2+2q$

p, q は自然数より，$n=1$, 2 のとき(∗)は成り立つ.

[2]　$n=k$, $n=k+1$ のときに(∗)が成り立つと仮定する.

つまり　$A_k=\alpha^k+\beta^k$, $A_{k+1}=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}$　がともに整数であると仮定する.

このとき　$A_{k+2}=\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}=(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)=p\cdot A_{k+1}+q\cdot A_k$

よって　$n=k+2$ のときも(∗)が成り立つ.

[1][2]より すべての自然数 n で(∗)が成り立つ.

(2)　$A_{3n}-{A_n}^3=\alpha^{3n}+\beta^{3n}-(\alpha^n+\beta^n)^3$

$=\alpha^{3n}+\beta^{3n}-(\alpha^{3n}+3\alpha^{2n}\beta^n+3\alpha^n\beta^{2n}+\beta^{3n})$

$=-3\alpha^n\beta^n(\alpha^n+\beta^n)$

$=-3(-q)^nA_n$

q は整数であり，かつ(1)より A_nは整数である.

よって　$A_{3n}-{A_n}^3$ は 3 で割り切れる.

第 6 講　数列　練習問題

1 (1) 整数からなる公差 1 の等差数列 a, b, c, d で $a^3+b^3+c^3=d^3$ を満たすものを求めよ.

(2) 0 でない整数からなる等比数列 a, b, c, d で $a^3+b^3+c^3=d^3$ を満たすものは存在しないことを示せ.

2　数列 $\{a_n\}$ は，すべての正の整数 n に対して　$0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$　を満たしているとする．このとき，すべての n に対して $a_n = 0$ であることを示せ．

第6講　数列　　練習問題　解答

1 (1) 整数からなる公差1の等差数列 a, b, c, d で $a^3+b^3+c^3=d^3$ を満たすものを求めよ.

(2) 0でない整数からなる等比数列 a, b, c, d で $a^3+b^3+c^3=d^3$ を満たすものは存在しないことを示せ.

解答例

対称性を考慮した置き方である.

(1) 題意より $a=b-1,\ c=b+1,\ d=b+2$ とおくことができる.

$a^3+b^3+c^3=d^3$ より　$(b-1)^3+b^3+(b+1)^3=(b+2)^3$

$b^3-3b^2-3b-4=0$　　$(b-4)(b^2+b+1)=0$

$b^2+b+1=\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$　より　$b=4$

よって　$\boldsymbol{a=3,\ b=4,\ c=5,\ d=6}$

(2) 公比を $r(\neq 0)$ とすると, $b=ar,\ c=ar^2,\ d=ar^3$ とおくことができる.

ここで a, b, c, d は整数より, r は有理数である.

$a^3+b^3+c^3=d^3$を満たすものがあると仮定すると

$a^3+a^3r^3+a^3r^6=a^3r^9$

$a\neq 0$ より　$r^9-r^6-r^3-1=0$

$r^3=t$ とおくと　$t^3-t^2-t-1=0$

正負が不明であるため, n の符号については言及していない.

r は有理数より t も有理数

よって　$t=\dfrac{n}{m}$ (n, m は互いに素の整数. $m>0$) とおくことができる.

このとき　$\left(\dfrac{n}{m}\right)^3-\left(\dfrac{n}{m}\right)^2-\dfrac{n}{m}-1=0$

$n^3=m(n^2+mn+m^2)$

m と n は互いに素より　$m=1$

よって　$n^3=n^2+n+1$

$n(n^2-n-1)=1$　……①

「積の形」に持ち込むのは整数問題の基本手法である.

n は整数より　$n=1$　または　$n=-1$　　ところがこのいずれも①を満たさず矛盾.

したがって, 背理法により題意は示された.

2 数列 $\{a_n\}$ は，すべての正の整数 n に対して　$0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$　を満たしているとする．このとき，すべての n に対して $a_n=0$ であることを示せ．

解答例

$0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$　……①　がすべての正の整数 n で成り立つとき

「すべての正の整数 n で $a_n=0$」……②であることを示す．

〔Ⅰ〕 $n=1$ のとき

①より　$0 \leqq 3a_1 \leqq a_1$

$0 \leqq 3a_1$　より　$a_1 \geqq 0$　　$3a_1 \leqq a_1$　より　$a_1 \leqq 0$　　よって　$a_1=0$

よって，②は成り立つ．

〔Ⅱ〕 $n \leqq i$（i は自然数）を満たすすべての正の整数 n で②が成り立つと仮定する．

ある１つの項で成り立つことの仮定ではなく，それまでのすべての項で成り立つことを仮定する．

$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_i=0$

$n=i+1$ のときを考える

①で $n=i+1$ のとき

$$0 \leqq 3a_{i+1} \leqq \sum_{k=1}^{i+1} a_k = a_1+a_2+\cdots\cdots+a_i+a_{i+1}=a_{i+1}\ （仮定より）$$

したがって　$0 \leqq 3a_{i+1} \leqq a_{i+1}$　　〔Ⅰ〕同様　$a_{i+1}=0$

よって，$n=i+1$ のときも②は成り立つ．

〔Ⅰ〕〔Ⅱ〕より，すべての正の整数 n に対して $a_n=0$ である．